Instrumentación Didáctica en la Enseñanza de la Sumatoria de Riemann en el Tronco Común de las Carreras de Ingeniería

Luis Ramón Siero González
Universidad Autónoma de Baja California
lsiero@uabc.edu.mx

Eilen Oviedo González
Universidad Autónoma de Baja California
eilen.oviedogonzalez@uabc.edu.mx

Gloria Azucena Torres de León
Universidad Autónoma de Baja California
torres.gloria@uabc.edu.mx

Resumen

La presente investigación tiene el propósito de presentar los resultados de un estudio de caso, llevado a cabo en la Escuela de Ciencias de la Ingeniería y la Tecnología (ECITEC) de la Universidad Autónoma del Estado de Baja California, dentro de las carreras de tronco común de Ingenierías, específicamente el área de cálculo Integral, en particular sobre el tema de la sumatoria de Riemann, el cual es un método fundamental para aproximar el área total bajo la gráfica de una función. Presentaremos un ejercicio didáctico aplicado a alumnos del nivel Universitario que cursan el Tronco Común de ocho carreras de ingeniería –ingeniería industrial, civil, aeroespacial, eléctrica, mecánica, mecatrónica, energías renovables, bioingeniería-, de igual manera se realiza una descripción detallada de la instrumentación didáctica de la actividad realizada, utilizando un método sencillo y su inmediata implicación en la enseñanza de las matemáticas. El mejoramiento de las didácticas utilizadas en estas materias es fundamental y tiene importantes consecuencias en muchas áreas del cálculo y el análisis matemático en la formación de las ciencias de la ingeniería.

Abstract

This research aims to present the results of a case study, conducted at the School of Engineering Sciences and Technology (ECITEC) of the Autonomous University of Baja California, within common core racing Engineering, specifically the area of integral calculus, particularly on the subject of the Riemann sum, which is fundamental to approximate the total area under the graph of a function method. Introduce a training exercise applied to university level students enrolled in the Common Core of eight races Industrial engineering, civil, aerospace -Engineering, electrical, mechanical, mechatronics, renewable energies, bioingeniería-, just as a detailed description is made didactic implementation of the activity, using a simple and immediate involvement in the teaching of mathematics. The improvement of teaching used in these materials is essential and has important implications in many areas of computing and mathematical analysis in the training of engineering sciences.

Palabras clave / Keywords:

Didáctica, enseñanza, Riemann, Ingeniería. / Teaching , teaching, Riemann , Engineering

Introducción

En el ECITEC la enseñanza de las matemáticas ocupa un lugar muy importante dentro del plan de estudios, en los primeros semestres se cursan 7 materias de matemáticas las cuales son álgebra lineal, calculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariable, entre otras, éstas asignaturas, forman parte de la etapa básica de la formación de nuevos ingenieros. En esta investigación analizaremos la materia de cálculo integral, al entrevistar a los maestros de esta asignatura, nos percatamos que uno de los problemas que se les presenta a los alumnos con más frecuencia, es el tema del cálculo de áreas por sumatorias de Riemman, debido a que los alumnos tienen un conocimiento confuso del tema y en algunos casos erróneo por lo que es importante explicarlo de una manera muy clara mediante actividades ilustrativas; la sumatoria de Riemman es un método para aproximar el área total bajo la gráfica de una curva, la cual es fácil calcular utilizando el segundo teorema fundamental del cálculo mediante una integral definida, pero en este caso lo que se requiere es que el alumno tenga una comprensión del concepto de integral, como una sumatoria de áreas y consiste en entender en conjunto, dicho concepto. En la forma en que se ha estado impartiendo la clase, este contenido por lo general confunde un poco a los alumnos, por lo que se propone una metodología como material didáctico para desarrollar el concepto de este tema mediante el cálculo de una función sencilla.

Para esta actividad didáctica se les propone a los estudiantes trabajar en equipos para que de esta manera puedan ayudarse entre si, Vigotsky (en Díaz Barriaga, 1998) hace referencia a la interacción social como parte fundamental del proceso de aprendizaje. El trabajo cooperativo y la interacción recíproca entre pares contribuyen a que el alumno alcance la significación del aprendizaje.

Otro problema es que los estudiantes tienden a usar programas computacionales para resolver los ejercicios que se les presentan, por lo que es cuesta un poco de más trabajo entender el tema y hasta se les pueden hacer invisible el proceso matemático del cálculo de áreas, además que es frecuente que se hagan las siguientes interrogantes: ¿Para qué se utilizan las matemáticas? ¿en dónde se aplican? son de las preguntas más frecuentes entre los alumnos y en algunas ocasiones no saben que las están utilizando y para el tema de sumatorias no le ven el uso práctico. Esta situación se debe a que las matemáticas se hacen invisibles para los estudiantes, a este proceso se le conoce como cajas negras (Black Boxes) (Williams J. y Wake G. 2007) y es causado por dos circunstancias: primero, no hacen los cálculos en papel y lápiz como antes, ahora utilizan programas de cómputo por lo que el estudiante comienzan a perder la habilidad para resolver ciertos problemas y por lo tanto deja de pensar; utiliza el programa como una caja negra de donde sólo le importa el resultado, no cómo se obtiene y; segundo, el alumno mecaniza los métodos o procesos y los hace de manera tan natural que no se da cuenta que está utilizando las matemáticas. Ahora bien, Damlamian A. y Stärβer R. (2009) encontraron que si utilizan las cajas negras como un proceso éste tiene algunas deficiencias las cuales se mencionan a continuación: limita tanto la innovación así como el análisis crítico y los ajustes a las técnicas, no permite hacer un análisis en caso de que la caja negra tenga un error, genera dificultad para que las personas puedan emitir un juicio ante las técnicas y la validación de los resultados.

La respuesta no es que dejen de utilizar la tecnología y que lo empiecen a hacer en papel y lápiz, como antes, si no que se les debe de enseñar de otra manera, los ejercicios que se apliquen en los salones de clase deben de ser más analíticos para que los alumnos tengan que explicar, justificar y concluir sobre las soluciones que proponen. A continuación se presentara el ejercicio, la manera en que se trabajo y los resultados obtenidos.

Desarrollo

En esta actividad se trabajo con los alumnos del segundo semestre de las carreras de ingeniería, se cuentan con 9 grupos de los cuales tomamos un grupo de control al cual se le aplico la actividad mencionada y a los otros 8 se les impartió la clase de manera tradicional, después de transcurrido un mes de haber visto el tema se les aplica un cuestionario para comparar el aprovechamiento de los alumnos que tuvieron la actividad con los que no la tuvieron.

A continuación se presenta la actividad propuesta en Siero L., Oviedo E., Fong B., Mata J. (2012), esta consiste en:

Calcular el área de un triángulo rectángulo que tenga de base $10\ cm$ y de altura $5\ cm$. Utilizando la fórmula para calcular el área del triangulo $A = \frac{(base)(altura)}{2}$, como se muestra en la Fig. 1.

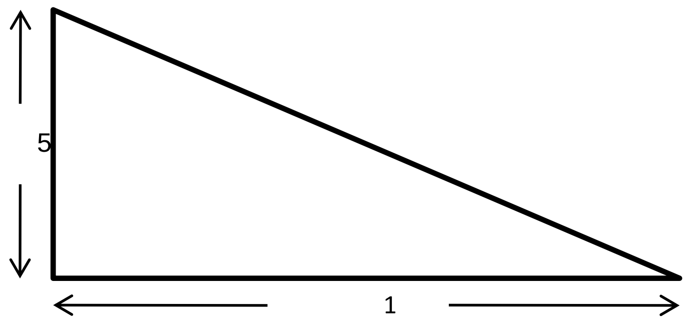


Fig. 1: Triángulo Rectángulo con 10 cm de base y 5 cm de altura

Inmediatamente después aproximar el área del mismo triángulo calculando mediante rectángulos inscritos para rectángulos de base $2\ cm, 1\ cm, \frac{1}{2}\ cm, \frac{1}{4}\ cm\ y\ \frac{1}{8}\ cm$, como se muestra en la siguiente Fig. 2.

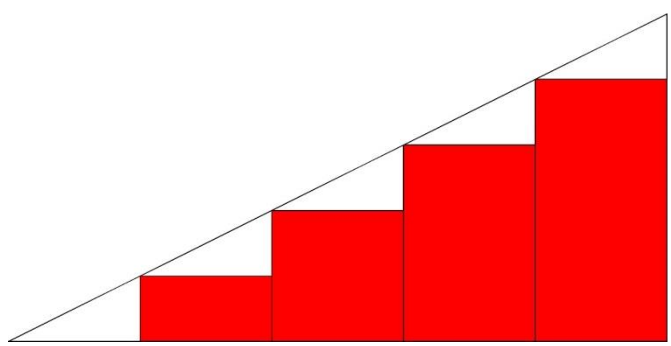


Fig. 2: Triángulo Rectángulo con 10 cm de base y 5 cm de altura con 2cm de base en cada rectángulo inscritos.

Al terminar se les solicita aproximar el área del mismo triángulo calculando mediante rectángulos circunscritos para rectángulos de base $2\ cm, 1\ cm, \frac{1}{2}\ cm, \frac{1}{4}\ cm\ y\ \frac{1}{8}\ cm$, como se muestra en la siguiente Fig. 3.

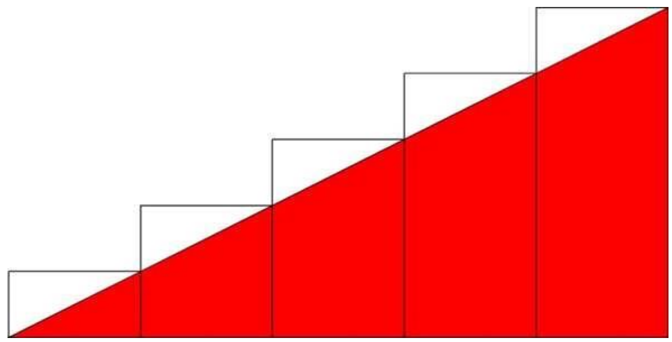


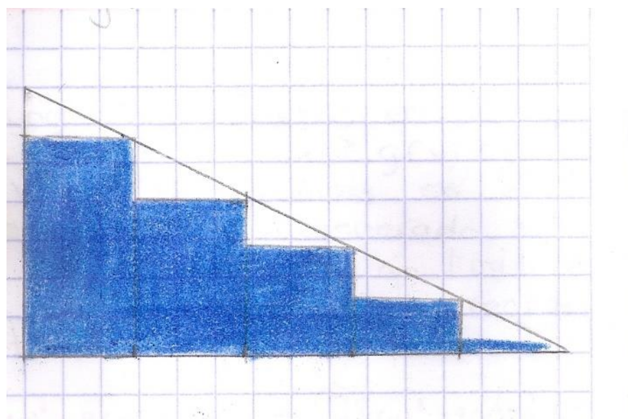
Fig. 3: Triángulo Rectángulo con 10 cm de base y 5 cm de altura con 2cm de base en cada rectángulo circunscritos.

Al finalizar contestar las siguientes preguntas.

1. Hacer equipos de 4 personas como máximo y poner los equipos en el wiki.
2. ¿Qué relación existe entre los rectángulos y los triángulos pequeños?
3. ¿Qué podemos decir al respecto de las 4 áreas que se aproximaron con respecto al área real del triángulo?
4. ¿Qué podemos concluir al respecto?

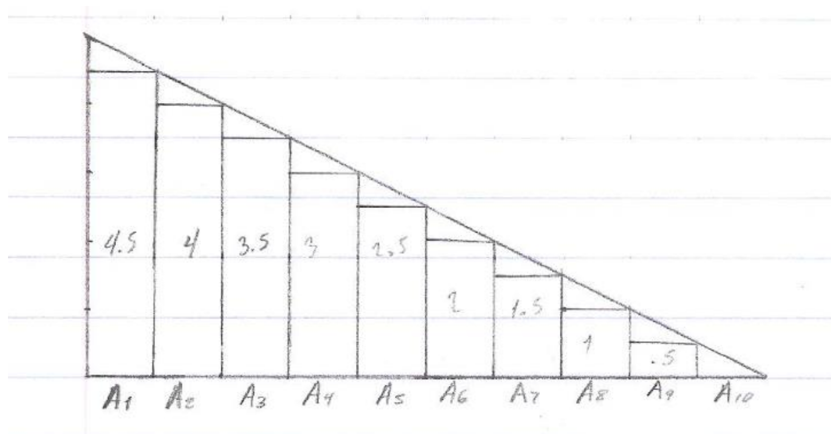
Ponemos enseguida el desarrollo de uno de los equipos y al finalizar las respuestas de varios ellos.

Con rectángulos de 2cm de base



1. $(4.05cm)(2cm) = 8.1cm^2$
2. $(2.9cm)(2cm) = 4.9cm^2$
3. $(2cm)(2cm) = 4cm^2$
4. $(1cm)(2cm) = 2cm^2$
5. **Total = $19cm^2$**

Con rectángulos de 1cm de base



A1= (1cm)(4.5cm)= $4.5cm^2$

A2= (1cm)(4cm)= $4cm^2$

A3= (1cm)(3.5)= $3.5cm^2$

A4= (1cm)(3)= $3cm^2$

A5= (1cm)(2.5)= $2.5cm^2$

A6= (1cm)(2)= $2cm^2$

A7= (1cm)(1.5)= 2.5cm^2

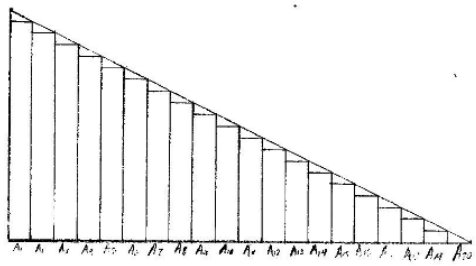
A8= (1cm)(1cm)= 1cm^2

A9= (1cm)(0.5cm)= 0.5cm^2

A10= (1cm)(1cm)= 1cm^2

Área total= 22.5cm^2

Rectángulos con base de ½ cm



A1= (0.5cm)(4.8cm)= 2.4cm^2

A2= (0.5cm)(4.5cm)= 2.25cm^2

A3= (0.5cm)(4.3cm)= 2.15cm^2

A4= (0.5cm)(4.0cm)= 2cm^2

A5= (0.5cm)(3.8cm)= 1.9cm^2

A6= (0.5cm)(3.5cm)=1.75cm^2

A7= (0.5cm)(3.3cm)= 1.65cm^2

A8= (0.5cm)(3cm)= 1.5cm^2

A9= (0.5cm)(2.8cm)= 1.4cm^2

A10= (0.5cm)(2.5cm)= 1.25cm^2

A11= (0.5cm)(2.3cm)= 1.15cm^2

A12= (0.5cm)(2cm)= 1cm^2

A13= (0.5cm)(1.8cm)= 0.9cm^2

A14= (0.5cm)(1.5cm)=0.75cm^2

A15= (0.5cm)(1.3cm)= 0.65cm^2

A16= (0.5cm)(1cm)= 0.5cm^2

A17= (0.5cm)(0.8cm)= 0.4cm^2

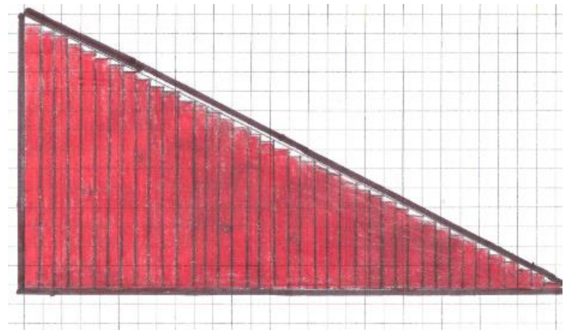
A18= (0.5cm)(0.5cm)= 0.25cm^2

A19= (0.5cm)(0.3cm)= 0.15cm^2

A20= (0.5cm)(0cm)= 0 cm^2

Área total= 23.75cm^2

Rectángulos con base de ¼ cm



A1= (0.25)(0.1)= **0.025c m^2**

A2= (0.25)(0.25)= **0.0625cm^2**

A3= (0.25)(0.3)= **0.075cm^2**

A4= (0.25)(0.5)= **0.125cm^2**

A5= (0.25)(0.6)= **0.15cm^2**

A6=(0.25)(0.75) = **0.1875cm^2**

A7= (0.25)(0.9)= **0.225cm^2**

A8= (0.25)(0.95)= **0.238cm^2**

A9= (0.25)(1)= **0.25cm^2**

A10= (0.25)(1.2) = **0.3cm^2**

A11= (0.25)(1.3)= **0.33cm^2**

A12= (0.25)(1.4)= **0.36cm^2**

A13= (0.25)(1.5)= **0.4cm^2**

A14= (0.25)(1.6)= **0.4cm^2**

A15= (0.25)(1.8)= **0.45cm^2**

A16= (0.25)(2)= **0.5cm^2**

A17= (0.25)(2.1)= **0.52cm^2**

A18= (0.25)(2.25)= **0.56cm^2**

A19= (0.25)(2.35)= **0.58cm^2**

A20= (0.25)(2.45)= **0.61cm^2**

A21= (0.25)(2.5)= **0.62cm^2**

A22= (0.25)(2.65)= **0.66cm^2**

A23= (0.25)(2.8)= **0.7cm^2**

A24= (0.25)(2.95)= **0.73cm^2**

A25= (0.25)(3.05)= **0.76cm^2**

A26= (0.25)(3.2)= **0.8cm^2**

A27= (0.25)(3.3)= **0.83cm^2**

A28= (0.25)(3.4)= **0.85cm^2**

A29= (0.25)(3.6)= **0.9cm^2**

A30= (0.25)(3.65)= **0.91cm^2**

A31= (0.25)(3.8)= **0.95cm^2**

A32= (0.25)(3.9)= **0.98cm^2**

A33= (0.25)(4)= **1cm^2**

A34= (0.25)(4.15)= **1.04cm^2**

A35= (0.25)(4.25)= **1.06cm^2**

A36= (0.25)(4.4)= **1.1cm^2**

A37= (0.25)(4.65)= **1.16cm^2**

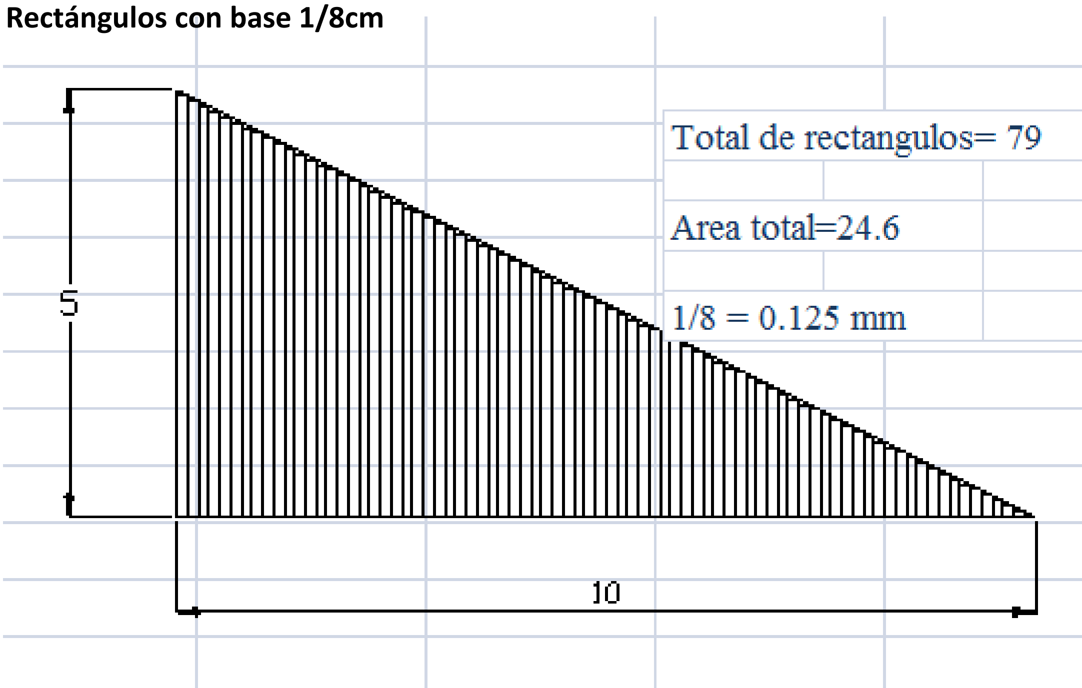
A38= (0.25)(4.7)= **1.18cm^2**

A39= (0.25)(4.8)= **1.2cm^2**

Se realizó un total de 39 rectángulos.

Área total= 23.78cm^2

Rectángulos con base 1/8cm



		BASE		ALTURA	AREA
A1	=	0.125	*	4.93	= 0.62
A2	=	0.125	*	4.87	= 0.61
A3	=	0.125	*	4.81	= 0.60
A4	=	0.125	*	4.75	= 0.59
A5	=	0.125	*	4.68	= 0.59
A6	=	0.125	*	4.62	= 0.58
A7	=	0.125	*	4.56	= 0.57
A8	=	0.125	*	4.5	= 0.56
A9	=	0.125	*	4.43	= 0.55
A10	=	0.125	*	4.37	= 0.55
A11	=	0.125	*	4.31	= 0.54
A12	=	0.125	*	4.25	= 0.53
A13	=	0.125	*	4.18	= 0.52
A14	=	0.125	*	4.12	= 0.52
A15	=	0.125	*	4.06	= 0.51
A16	=	0.125	*	4	= 0.50
A17	=	0.125	*	3.93	= 0.49
A18	=	0.125	*	3.87	= 0.48
A19	=	0.125	*	3.81	= 0.48
A20	=	0.125	*	3.71	= 0.46
A21	=	0.125	*	3.68	= 0.46
A22	=	0.125	*	3.62	= 0.45
A23	=	0.125	*	3.56	= 0.45
A24	=	0.125	*	3.5	= 0.44
A25	=	0.125	*	3.43	= 0.43
A26	=	0.125	*	3.37	= 0.42
A27	=	0.125	*	3.31	= 0.41
A28	=	0.125	*	3.25	= 0.41
A29	=	0.125	*	3.18	= 0.40
A30	=	0.125	*	3.12	= 0.39
A31	=	0.125	*	3.06	= 0.38
A32	=	0.125	*	3	= 0.38
A33	=	0.125	*	2.93	= 0.37
A34	=	0.125	*	2.87	= 0.36
A35	=	0.125	*	2.81	= 0.35
A36	=	0.125	*	2.75	= 0.34
A37	=	0.125	*	2.68	= 0.34
A38	=	0.125	*	2.62	0.33
A39	=	0.125	*	2.56	0.32
A40	=	0.125	*	2.5	0.31
A41	=	0.125	*	2.43	0.30

A42	=	0.125	*	2.37	0.30
A43	=	0.125	*	2.31	0.29
A44	=	0.125	*	2.25	0.28
A45	=	0.125	*	2.18	0.27
A46	=	0.125	*	2.12	0.27
A47	=	0.125	*	2.06	0.26
A48	=	0.125	*	2	0.25
A49	=	0.125	*	1.93	0.24
A50	=	0.125	*	1.87	0.23
A51	=	0.125	*	1.81	0.23
A52	=	0.125	*	1.75	0.22
A53	=	0.125	*	1.68	0.21
A54	=	0.125	*	1.62	0.20
A55	=	0.125	*	1.56	0.20
A56	=	0.125	*	1.5	0.19
A57	=	0.125	*	1.43	0.18
A58	=	0.125	*	1.37	0.17
A59	=	0.125	*	1.31	0.16
A60	=	0.125	*	1.25	0.16
A61	=	0.125	*	1.18	0.15
A62	=	0.125	*	1.12	0.14
A63	=	0.125	*	1.06	0.13
A64	=	0.125	*	1	0.13
A65	=	0.125	*	0.93	0.12
A66	=	0.125	*	0.87	0.11
A67	=	0.125	*	0.81	0.10
A68	=	0.125	*	0.75	0.09
A69	=	0.125	*	0.68	0.09
A70	=	0.125	*	0.62	0.08
A71	=	0.125	*	0.56	0.07
A72	=	0.125	*	0.5	0.06
A73	=	0.125	*	0.43	0.05
A74	=	0.125	*	0.37	0.05
A75	=	0.125	*	0.31	0.04
A76	=	0.125	*	0.25	0.03
A77	=	0.125	*	0.18	0.02
A78	=	0.125	*	0.12	0.02
A79	=	0.125	*	0.06	0.01

TOTAL	24.65cm^2

Ahora presentaremos las respuestas de los alumnos, que realizaron la actividad.

Equipo 1

¿Qué relación existe entre los rectángulos y los triángulos pequeños?

Sabemos bien que calcular el área de los polígonos (triángulos, rectángulos, paralelogramos, hexágonos, por mencionar algunos), es relativamente sencillo. Sin embargo el hallar aéreas de regiones diferentes a los polígonos es más difícil. Los antiguos griegos determinaron fórmulas para calcular las áreas de algunas regiones generales (principalmente aquellas delimitadas por cónicas).

En este curso de cálculo integral hemos aprendido a calcular al área bajo una o más cuervas definidas.

En el ejercicio realizado se utilizaron rectángulos inscritos para poder determinar el área del triángulo. Si examinamos nuestros datos y las figuras notamos que el área definida por los rectángulos inscritos es menor que el área de la región, y que si por ejemplo utilizáramos rectángulos circunscritos, el área definida por estos seria mayor al área de la región.

Observamos también que el tamaño de los triángulos pequeños permanece constante (en este caso), entonces deducimos que estos triángulos surgen al ajustar el intervalo xi, o xi-1 de los rectángulos con respecto a la función de la recta.

Una forma para obtener este margen de error, seria restando el área definida por rectángulos circunscritos menos el área definida por rectángulos inscritos.

¿Qué podemos decir al respecto de las 4 áreas que se aproximaron con respecto al área real del triángulo?

Al incrementar el número de rectángulos utilizados en este ejercicio (disminuir su anchura), podemos obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región.

¿Qué podemos concluir al respecto?

Lo que observe de este trabajo fue que entre más ancha es el tamaño de la longitud de los rectángulos mas inexacto era el resultado del área del triángulo, por lo tanto entre más pequeña es la longitud más exacto es.

Equipo 2

¿Qué relación existe entre los rectángulos y los triángulos pequeños?

Que los rectángulos pequeños forman una parte del triángulo total, pero al ser cuadriláteros sobran unas pequeñas partes (éstos son los triángulos pequeños), además entre varios de los triángulos chicos se podrían armar los rectángulos pequeños.

¿Qué podemos decir al respecto de las 4 áreas que se aproximaron con respecto al área real del triángulo?

Que entre más pequeña es la base y área de los rectángulos chicos más posible es abarcar el área del triángulo y con dichos rectángulos y así acercarse más al área real del triángulo grande, esto porque sobra menos área (triángulos pequeños).

¿Qué podemos concluir al respecto?

Entre menor sea la base de las figuras en que se divide mayor cantidad de espacio se aprovecha y menor se pierde, así se puede acercar más al área real.

Equipo 3

¿Qué relación existe entre los rectángulos y los triángulos pequeños? En todos los cálculos realizados observamos que hay más triángulos que rectángulos dentro de las figuras pero que en conjunto los triángulos pequeños ocupan un área menor que el área de todos los rectángulos juntos en relación al área total del triángulo de 10cmx5cm y el espacio ocupado por los pequeños triángulos corresponde al área faltante del total del triángulo equilátero limitada por los rectángulos.

¿Qué podemos decir al respecto de las 4 áreas que se aproximaron con respecto al área real del triángulo? Podemos decir que mientras más pequeña era la base de los rectángulos, mas rectángulos podían formarse dentro del triángulo de 10cmx5cm y al sumar las áreas de todos los rectángulos más próxima era esa suma al área calculada real. Además podemos decir que el área de los triángulos pequeños que se formaba iba haciéndose cada vez más pequeña en relación al área de los rectángulos.

¿Qué podemos concluir al respecto?

La actividad que realizamos en equipo ayudo a que todos comprendiéramos el concepto real de obtener el área de una región plana. En la actividad nos dimos cuenta que mientras más pequeña era la base de los rectángulos, más de estos podían formarse dentro del triángulo y la suma de las áreas de cada uno de ellos se aproximaba más al área real del triángulo, que era 25cm2. Cuando queremos obtener el área bajo la curva de cualquier función f(x) limitada por dos valores de x (x=a y x=b) tratamos de hacer los rectángulos inscritos tan pequeños que el área de los triangulitos que se forman arriba pueda ser despreciable para poder obtener el área real bajo la curva. En clase también aprendimos que podemos dibujar rectángulos circunscritos, es decir, por fuera de la función. En conclusión, la sumatoria de Riemman muestra básicamente lo que acabamos de experimentar: nuestro Δx representa la longitud de nuestros sub-intervalos, y como en este caso intentamos poner la mayor cantidad de n rectángulos posibles para obtener el área real bajo la curva de cualquier función, la cantidad n tiende a ser infinita.

Respuestas de los equipos de los alumnos que no hicieron previamente la actividad.

Equipo 1

¿Qué relación existe entre los rectángulos y los triángulos pequeños?

El área será diferente, pero los triángulos serán proporcionales.

¿Qué podemos decir al respecto de las 4 áreas que se aproximaron con respecto al área real del triángulo?

Conforme más chicos se hacen los rectángulos más se acerca al área real.

¿Qué podemos concluir al respecto?

Que son proporcionales en sus medidas.

Equipo 2

¿Qué relación existe entre los rectángulos y los triángulos pequeños?

La sumatoria de sus áreas es igual al área del triángulo rectángulo.

¿Qué podemos decir al respecto de las 4 áreas que se aproximaron con respecto al área real del triángulo?

La sumatoria de las 4 áreas es igual al área del triángulo rectángulo.

¿Qué podemos concluir al respecto?

Es el procedimiento de para la sumatoria de Riemman, para encontrar el área.

Conclusión

La comprensión de los temas matemáticos ayuda a los estudiantes, sobre todo en el nivel universitario para desarrollar un pensamiento deductivo, así como el razonamiento lógico al estudiar las propiedades y las relaciones cuantitativas entre los elementos. También ayudan a ejercitar actividades mentales, las cuáles dentro de la cotidianeidad ayuda a una mejor resolución de problemas, especialmente en el área de las ingenierías.

En esta ocasión se presentó una actividad didáctica para la enseñanza de las sumatorias de Riemman, se puede apreciar el resultado del cambio en la didáctica del ejercicio en clase y por el tipo de respuestas que los alumnos que participaron en el ejercicio didáctico en general entienden el concepto de aproximación del área mediante sumatorias, por lo tanto logrando ejercitar teoremas matemáticos, se puede trabajar con ellos en la complejidad de las actividades.

Los alumnos que no realizaron la actividad tienen todavía dudas o se confunden con el concepto aunque a fin de cuentas repiten el discurso que escuchan del profesor sin darse cuenta de lo que les están preguntando.

Es a través de la focalización y el mejoramiento de la enseñanza en temas matemáticos y el fortalecimiento de la didáctica para el tratamiento de los temas señalados como más complejos por los estudiantes, que han sido posible lograr mejores resultados en la aplicación de proyectos que requieren una aproximación distinta a las situaciones propuestas.

Bibliografía.

Damlamian, A. Stärβer R. (2009), “ICMI Study 20: educational interfaces between mathematics and industry”, ZDM Mathematics Education 41 525 – 533.

Díaz Barriaga, F. (1998) Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México: McGraw-Hill.

Siero L., Oviedo E., Fong B., et al (2012). “Contribuciones didácticas para la comprensión del tema de Sumatoria de Riemann en Cálculo Integral”, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Vol 20, 121-130.

Williams, J. and Wake, G. (2007) “Black Boxes In Workplace Mathematics”, Educational Studies in Mathematics 64, 317 - 343.